

Integrasi Romberg dan Monte Carlo, Dua Pendekatan Berbeda Untuk Solusi Sistem Reverse Osmosis Pada Media Berpori

Hery Andi Sitompul¹, Dewi Sholeha²,

¹Teknik Elektro, Universitas HKBP Nommensen, Medan, Indonesia

² Teknik Elektro, Universitas Darma Agung, Medan. Indonesia

Email : heryandisitompul@uhn.ac.id

ARTICLE INFO

Article history:

Received: 08 November 2025

Revised: 10 Desember 2025

Accepted: 24 Januari 2026

Keywords:

Reverse Osmosis,

Difusi,

Numerik,

Romberg,

Monte Carlo

Published by

Impression: Jurnal Teknologi dan Informasi

Copyright © 2025 by the Author(s) | This is an open-access article distributed under the Creative Commons Attribution which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



ABSTRACT

Sistem reverse osmosis merupakan metode yang sangat populer untuk pemurnian air dengan memanfaatkan aliran air dari pori – pori media yang semi permeabel. Pemodelan matematis untuk sistem ini dilakukan dengan pendekatan persamaan adveksi-difusi berbentuk persamaan diferensial parsial. Dalam persamaan solusi eksak sistem reverse osmosis pada penelitian sebelumnya terdapat bentuk integral tak wajar, dimana integral secara analitik sulit dilakukan. Integrasi secara numerik merupakan pilihan satu-satunya untuk menyelesaikan integral tersebut. Dalam kajian ini Pendekatan numerik secara deterministik dan stokastik dilakukan untuk menyelesaikan bentuk integral tersebut. Integrasi Romberg orde-10 menghasilkan solusi yang paling optimum untuk solusi persamaan adveksi-difusi pada sistem reverse osmosis.

The reverse osmosis system is a very popular method for water purification by utilizing water flow from the pores of a semi-permeable medium. Mathematical modeling for this system is carried out using an advection-diffusion equation approach in the form of a partial differential equation. In the exact solution equation of the reverse osmosis system in previous studies, there is an improper integral form, where integration is analytically difficult to perform. Numerical integration is the only option for solving this integral. In this study, deterministic and stochastic numerical approaches are used to solve this integral form. The 10th order Romberg integration produces the most optimal solution for the advection-diffusion equation in the reverse osmosis system.

Corresponding Author:

Hery Andi Sitompul

Teknik Elektro, Universitas HKBP Nommensen, Medan, Indonesia

Email: heryandisitompul@uhn.ac.id

PENDAHULUAN

Pengembangan model matematika dan solusinya mempunyai peranan yang sangat penting dalam kehidupan zaman sekarang. Salah satu permasalahan yang dihadapi oleh masyarakat luas zaman sekarang adalah ketersediaan air bersih. Berbagai model atau teknik pemurnian air untuk memenuhi ketersediaan air bersih telah berkembang dengan sangat pesat dalam beberapa dekade ini, salah satunya adalah sistem Reverse Osmosis. (Huliinko S.V. K. Y., 2022) (Ahmed Saeed., 2024)

Pemurnian air dengan sistem Reverse Osmosi memanfaatkan sistem aliran fluida dalam media berpori untuk menyaring zat – zat polutan seperti Tembaga(Co), Seng(Zn), Magan (Ma), Besi (Fe), dan lain - lain. Dimana zat ini mempunyai peranan penting dalam proses biologi dalam tubuh manusia. (Paola A. A.T., 2023)

Pada sistem Reverse Osmosis air akan mengalir dari tekanan tinggi ke tekanan yang lebih rendah melalui resapan pori – pori pada media seperti pasir, kerikil, koral dan bahan berpori sangat kecil lainnya yang semipermeabel dimana hanya air murni yang bisa lewat untuk menyaring zat – zat polutan. (Samad Noeiaghdam., 2025)

Model matematika sistem Reverse Osmosis dibangun berdasarkan hukum Darcy dimana laju aliran fluida dalam media berpori sebanding dengan gradien tekanan dan permeabilitas. Persamaan aliran fluida dalam media berpori dinyatakan dalam persamaan diferensial parsial dalam variabel x, y, t . Dimana x, y menyatakan konsentrasi polutan pada koordinat (x, y) dan t adalah variabel bebas waktu. (Hadeer K. M., 2024) (Samad Noeiaghdam., 2025)

Beberapa peneliti sebelumnya menggunakan beberapa pendekatan yang berbeda untuk menggambarkan permasalahan sistem Reverse Osmosis dalam sebuah persamaan matematis, diantaranya (Huliinko S.V. K. Y., 2020) dan (Samad Noeiaghdam., 2025) menggunakan persamaan adveksi-difusi untuk menggambarkan aliran zat polutan karena pergerakan fluida dan penyebaran acak pada koordinat (x, y) dalam waktu t .

Solusi dari persamaan adveksi-difusi pada sistem Reverse Osmosis dapat ditentukan dengan numerik dan eksak. (Saloua Helali., 2013) menentukan solusi persamaan adveksi-difusi tersebut secara numerik dan solusi eksak telah diselesaikan oleh (Samad Noeiaghdam., 2025). Dalam solusi eksak tersebut terdapat bentuk integral yang harus diselesaikan dan hampir tidak bisa didapatkan secara analitik. Metode numerik merupakan pilihan satu - satunya untuk menyelesaikan bentuk integral tersebut.

Masalah integral secara umum dapat dilakukan dengan cara deterministik dan stokastik, deterministik adalah sistem yang pasti, dapat diprediksi dari awal dan tanpa unsur keacakan atau probabilitas, sedangkan stokastik menghadirkan kemungkinan dan keacakan. Integrasi Romberg yang merupakan salah satu bentuk deterministik memberikan akurasi hasil baik dari metode dasar seperti Aturan Trapezium dengan menggunakan teknik ekstrapolasi Richardson, menghasilkan tabel Romberg di mana aproksimasi integral menjadi jauh lebih baik. (Iqbal M. Batiha., 2024) (Muhammad Abdul Gani., 2024). Integrasi Monte Carlo merupakan bentuk integrasi secara stokastik, metode ini cocok untuk masalah integral bentuk yang sangat kompleks dan berdimensi tinggi. (Herbert, 2022), (Venelin Todorov., 2019) dan (Adrian G.Wills., 2023). Bentuk integrasi dalam solusi persamaan adveksi-difusi mempunyai peranan yang sangat vital, sehingga pada tulisan ini akan dipaparkan penyelesaian secara numerik berdasarkan dua pendekatan yang berbeda dan akan diperlihatkan hasil dari sudut deterministik dan stokastik

KAJIAN TEORI

Sistem Reverse Osmosis pada media berpori, aliran fluida dibangun menggunakan persamaan adveksi-difusi berbentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan ini menggambarkan hantaran polutan pada media semi-permiabel. Konsentrasi polutan pada koordinat (x, y) diberikan dalam persamaan (Samad Noeiaghdam., 2025) :

$$y \frac{\partial Q}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}$$

Dimana $\alpha = \frac{Ph}{v_0}$, dan kondisi batas :

$Q(0, y) = L_0$, $q(x, y) = L_1$, dan syarat awal :

$$-P \frac{\partial Q}{\partial y}(x, 0) = qQ(x, 0)$$

Dimana (x, y) variabel lokasi, $Q(x, y)$ konsentrasi polutan pada lokasi koordinat (x, y) , q adalah laju aliran fluida pada media berpori, P adalah penyebaran polutan dalam air, h adalah jarak batas media berpori dengan pusat aliran fluida masuk sistem, v_0 adalah kecepatan air horizontal pada jarak h dari batas media. Solusi eksak dari sistem ini sudah diperoleh (Samad Noeiaghdam., 2025) yaitu:

$$Q(x, 0) = \frac{3^{-\frac{1}{3}} q L_0}{PJ} \left(\frac{Ph}{v_0} \right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + L_0$$

Dimana J didefinisikan sebuah bentuk integral tak wajar $J = \int_0^\infty e^{-A^3} AdA$. Solusi dari J memberikan dampak yang sangat signifikan pada hasil prediksi level konsentrasi polutan. Sehingga penting sekali untuk mendapatkan J yang akurat. Secara analitik solusi J akan sangat sulit untuk ditentukan sehingga metode numerik akan menjadi pilihan utama.

Integrasi Romberg

Untuk aproksimasi sebuah integral tentu $\int_a^b f(x) dx$ digunakan ekstrapolasi Richardson dan mengkombinasikannya dengan aturan Trapezium dengan Δx yang berbeda-beda pada setiap orde. Nilai awal sebanyak k diperoleh dengan aturan Trapezium dengan jumlah partisi $n = 2^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Bentuk integrasi Romberg adalah:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^j - 1} (R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}), k = j, j + 1, \dots$$

Dengan nilai awal :

$$R_{1,1} = \frac{\Delta x}{2} (f(b) + f(a)), \Delta x = \frac{b-a}{2}, \text{ aturan Trapezium 1 partisi.}$$

$$R_{2,1} = \frac{\Delta x}{2} \left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right), \Delta x = \frac{b-a}{2}, \text{ aturan Trapezium 2 partisi.}$$

Sampai nilai awal orde- n

$$R_{k,1} = \frac{\Delta x}{2} [f(a) + 2f(a + \Delta x) + 2f(a + 2\Delta x) + \dots + 2f(a + (k-1)\Delta x) + f(b)], n = 2^{k-1}, \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Nilai $R_{k,j}$ selanjutnya ditentukan dari nilai awal ini hingga k tertentu dimana solusi akan konvergen. (Iqbal M. Batiha., 2024)

Integrasi Monte Carlo

Metode ini bertumpu pada hukum bilangan besar, semakin besar sampling yang terlibat dalam perhitungan maka hasil yang diperoleh semakin akurat. Metode ini memperkirakan nilai integral menggunakan sampel acak dari distribusi tertentu, dengan bentuk umum (Sitompul et al., 2025):

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

Dengan x_i adalah sampel acak yang terdistribusi seragam di $[a, b]$. (Herbert, 2022) dan (Venelin Todorov., 2019)

METODE PENELITIAN

Bentuk $\mathcal{I} = \int_0^\infty e^{-A^3} AdA$ pada persamaan solusi sistem reverse osmosis akan ditentukan dengan integrasi Romberg dari pendekatan deterministik dan integrasi Monte Carlo dari sisi stokastik.

Dalam integrasi Romberg maupun Monte Carlo mengharuskan batas integral yang defenitif $[a, b]$, maka batas integral harus ditransformasi dari $[0, \infty]$ ke $[a, b]$:

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty e^{-A^3} AdA$$

$$\mathcal{I} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-A^3} AdA$$

Dalam kajian ini nilai $f(A) = e^{-A^3} A$ akan disimulasikan untuk beberapa nilai b , untuk memperlihatkan nilai $b \rightarrow \infty$, $f(A)$ akan konvergen ke sebuah nilai tertentu. Untuk integrasi Romberg perhitungan akan menggunakan Orde-6,8, dan 10 menggunakan rekursif Romberg sehingga akan didapat tabel segita bawah seperti berikut:

$$\begin{array}{cccccc} R_{1,1} & & & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & & \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} & & \\ R_{5,1} & R_{5,2} & R_{5,3} & R_{5,4} & R_{5,5} & \\ R_{6,1} & R_{6,2} & R_{6,3} & R_{6,4} & R_{6,5} & R_{6,6} \end{array}$$

Solusi integrasi Romberg untuk $\int_0^b e^{-A^3} AdA = R_{6,6}$ orde-6, $R_{8,8}$ orde-8, $R_{10,10}$ untuk orde-10. Integrasi Monte Carlo dilakukan dengan mengambil sampel yang semakin besar pada setiap simulasi

sehingga prinsip bilangan besar $N \rightarrow \infty$ terpenuhi. Sampel akan dibangkitkan secara acak dari distribusi seragam $U \sim (a, b)$ kemudian nilai $f(A_i) = e^{-A_i^3} A_i$ ditentukan untuk setiap $A_i \in U \sim (a, b), i = 1, 2, \dots, N$. Hasil yang diperoleh secara numerik ini akan dibandingkan dengan hasil eksak yang diperoleh pada penelitian sebelumnya oleh (Samad Noeiaghdam., 2025).

HASIL PENELITIAN

Bentuk $J = \int_0^\infty e^{-A^3} A dA$ pada persamaan solusi sistem reverse osmosis akan ditentukan dengan integrasi Romberg dari pendekatan deterministik dan integrasi Monte Carlo dari sisi stokastik.

Dalam integrasi Romberg maupun Monte Carlo mengharuskan batas integral yang defenitif $[a, b]$, maka batas integral harus ditransformasi dari $[0, \infty]$ ke $[a, b]$:

$$J = \int_0^\infty e^{-A^3} A dA$$

$$J = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-A^3} A dA$$

Dalam kajian ini nilai $f(A) = e^{-A^3} A$ akan disimulasikan untuk beberapa nilai b , untuk memperlihatkan nilai $b \rightarrow \infty$, $f(A)$ akan konvergen ke sebuah nilai tertentu. Untuk integrasi Romberg perhitungan akan menggunakan Orde-6,8, dan 10 menggunakan rekursif Romberg sehingga akan didapat tabel segita bawah seperti berikut :

$$\begin{array}{cccccc} R_{1,1} & & & & & \\ R_{2,1} & R_{2,2} & & & & \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & & \\ R_{4,1} & R_{4,2} & R_{4,3} & R_{4,4} & & \\ R_{5,1} & R_{5,2} & R_{5,3} & R_{5,4} & R_{5,5} & \\ R_{6,1} & R_{6,2} & R_{6,3} & R_{6,4} & R_{6,5} & R_{6,6} \end{array}$$

Solusi integrasi Romberg untuk $\int_0^b e^{-A^3} A dA = R_{6,6}$ orde-6, $R_{8,8}$ orde-8, $R_{10,10}$ untuk orde-10. Integrasi Monte Carlo dilakukan dengan mengambil sampel yang semakin besar pada setiap simulasi sehingga prinsip bilangan besar $N \rightarrow \infty$ terpenuhi. Sampel akan dibangkitkan secara acak dari distribusi seragam $U \sim (a, b)$ kemudian nilai $f(A_i) = e^{-A_i^3} A_i$ ditentukan untuk setiap $A_i \in U \sim (a, b), i = 1, 2, \dots, N$. Hasil yang diperoleh secara numerik ini akan dibandingkan dengan hasil eksak yang diperoleh pada penelitian sebelumnya oleh (Samad Noeiaghdam., 2025).

$$J = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-A^3} A dA = \int_0^4 e^{-A^3} A dA$$

Integrasi Romberg dimulai dengan menentukan seluruh nilai awal ekstrapolasi kemudian menentukan tabel Romberg.

$$R_{1,1} = \frac{(4-0)/1}{2} (f(0) + f(4))$$

$$= \frac{4}{2} [(e^{-0^3} \cdot 0) + (e^{-4^3})]$$

$$R_{2,1} = \frac{(4-0)/2}{2} (f(0) + 2f(2) + f(4))$$

$$= \frac{(4-0)/2}{2} ((e^{-0^3} \cdot 0) + 2(e^{-2^3} \cdot 2) + (e^{-2^3} \cdot 4))$$

Hingga nilai awal orde-6

$$R_{6,1} = \frac{(4-0)/32}{2} [f(0) + 2f(\Delta x) + 2f(2\Delta x) + \dots + 2f((n-1)\Delta x) + f(4)], n = 32$$

Hal yang sama dilakukan untuk orde-8, dengan $\Delta x = \frac{(4-0)}{128}, n = 128$ partisi dan untuk orde-10 dengan $\Delta x = \frac{(4-0)}{512}, n = 512$ partisi.

Berikut adalah hasil ekstrapolasi untuk orde-6, orde-8, dan orde-10

Tabel 1. Tabel Romberg Orde-6

k	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$	$R_{k,3}$	$R_{k,4}$	$R_{k,5}$	$R_{k,6}$
1	0					
2	0.001341	0.001789				
3	0.368550	0.490953	0.523564			
4	0.430563	0.451234	0.448586	0.447396		
5	0.446164	0.451364	0.451373	0.451417	0.451433	
6	0.450070	0.451372	0.451373	0.451373	0.451372	0.451372

Sumber: Matlab R2015a

Tabel 2. Tabel Romberg Orde-8

k	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$	$R_{k,3}$	$R_{k,4}$	$R_{k,5}$	$R_{k,6}$	$R_{k,7}$	$R_{k,8}$
1	0							
2	0.00134	0.001789						
3	0.36855	0.490953	0.523564					
4	0.43056	0.451234	0.448586	0.44739				
5	0.44616	0.451364	0.451373	0.45141	0.451433			
6	0.45007	0.451372	0.451373	0.45137	0.451372	0.45137		
7	0.45104	0.451372	0.451372	0.45137	0.451372	0.45137	0.45137	
8	0.45129	0.451372	0.451372	0.45137	0.451372	0.45137	0.45137	0.451372

Sumber: Matlab R2015a

Tabel 3. Tabel Romberg Orde-10

k	$R_{k,1}$	$R_{k,2}$	$R_{k,3}$	$R_{k,4}$	$R_{k,5}$	$R_{k,6}$	$R_{k,7}$	$R_{k,8}$	$R_{k,9}$	$R_{k,10}$
1	0									
2	0.00134	0.00178								
3	0.36855	0.49095	0.52356							
4	0.43056	0.49095	0.44858	0.44739						
5	0.44616	0.45123	0.45137	0.45141	0.45143					
6	0.45007	0.45136	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137				
7	0.45104	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137			
8	0.45129	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137		
9	0.45135	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	
10	0.45136	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137	0.45137

Sumber: Matlab R2015a

Tabel 1, Tabel 2, dan Tabel 3 masing-masing menampilkan hasil perhitungan integrasi numerik menggunakan metode Romberg dengan tingkat orde yang berbeda, yaitu orde-6, orde-8, dan orde-10. Setiap tabel menyajikan nilai aproksimasi integral dalam bentuk matriks Romberg $R_{(k,j)}$, di mana indeks k menunjukkan tingkat pembagian interval (refinement), sedangkan indeks j menunjukkan tingkat ekstrapolasi Richardson yang digunakan.

Pada kolom pertama $R_{(k,1)}$, nilai integral diperoleh dari aturan trapesium komposit dengan jumlah subinterval yang semakin besar seiring bertambahnya nilai k . Terlihat bahwa pada nilai k kecil, hasil aproksimasi masih jauh dari nilai konvergen, ditandai dengan nilai yang sangat kecil atau belum stabil. Namun, seiring peningkatan nilai k , nilai $R_{(k,1)}$ mulai mendekati nilai integral sebenarnya.

Kolom-kolom berikutnya $R_{(k,2)}, R_{(k,3)}, \dots$ merupakan hasil ekstrapolasi Romberg, yang bertujuan untuk mengurangi galat orde rendah dengan memanfaatkan hasil aproksimasi sebelumnya. Dari ketiga tabel, dapat diamati bahwa nilai-nilai pada kolom ekstrapolasi lebih tinggi menunjukkan konvergensi yang lebih cepat dibandingkan kolom pertama. Hal ini ditunjukkan oleh semakin kecilnya perubahan nilai antar baris pada kolom yang sama.

Pada Tabel 1 (Orde-6), nilai aproksimasi mulai stabil pada baris ke-5 dan ke-6, dengan nilai akhir mendekati 0,451372. Perubahan nilai antar kolom pada baris terakhir sangat kecil, yang menandakan bahwa hasil integrasi telah mencapai tingkat konvergensi yang baik.

Pada Tabel 2 (Orde-8), kestabilan nilai terjadi lebih awal dan lebih konsisten dibandingkan orde-6. Nilai aproksimasi pada kolom-kolom akhir cenderung konstan mulai dari $k = 6$ hingga $k = 8$, yang menunjukkan bahwa peningkatan orde memberikan akurasi yang lebih baik dengan jumlah iterasi yang relatif sama.

Sementara itu, Tabel 3 (Orde-10) menunjukkan tingkat konvergensi yang paling tinggi. Nilai aproksimasi integral telah stabil sejak $k = 6$ dan hampir tidak mengalami perubahan hingga $k = 10$. Seluruh kolom ekstrapolasi pada baris akhir menunjukkan nilai yang sama, yaitu sekitar 0,45137, yang mengindikasikan bahwa solusi telah mencapai nilai integral yang sangat akurat.

Secara keseluruhan, ketiga tabel menunjukkan bahwa peningkatan orde metode Romberg meningkatkan kecepatan konvergensi dan kestabilan hasil. Nilai akhir integral yang diperoleh dari orde-6, orde-8, dan orde-10 relatif sama, sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil integrasi numerik telah konvergen pada nilai sekitar 0,45137. Seluruh perhitungan dilakukan menggunakan Matlab R2015a, sebagaimana tercantum pada sumber tabel.

Integrasi Monte Carlo dilakukan 5 kali dengan jumlah sampel yang semakin besar yaitu $N = 1.000, 10.000, 100.000, 200.000, 300.000$. Sampel dibangkitkan dari $U \sim (0, 4, N, 1)$. Hasil perhitungan secara numerik untuk kedua metode pendekatan adalah:

Tabel 4. Hasil Seluruh Integrasi Numerik

Metode Integrasi	Hasil Numerik	Nilai Eksak	Galat Mutlak
Romberg Orde-6	0.4513729254	0.4513726463	2.791000000001986e-07
Romberg Orde-8	0.4513726465	0.4513726463	1.999999610369230e-10
Romberg Orde-10	0.4513726464	0.4513726463	1.000000082740371e-10
Monte Carlo N=1.000	0.4571022978	0.4513726463	0.005729651500000
Monte Carlo N=10.000	0.4442064668	0.4513726463	0.007166179500000
Monte Carlo N=100.000	0.4518024070	0.4513726463	4.297607000000037e-04
Monte Carlo N=200.000	0.4512190845	0.4513726463	1.535618000000349e-04
Monte Carlo N=300.000	0.4513788507	0.4513726463	6.204399999987231e-06

Sumber : Matlab R2015a

PEMBAHASAN

Untuk keseluruhan integrasi numerik yang telah dilakukan, nilai galat mutlak paling kecil diperoleh pada Integrasi Romberg orde-10. Pada integrasi Monte Carlo hasil yang diperoleh semakin akurat seiring dengan jumlah sampel yang makin besar. Sehingga solusi paling optimal adalah:

$$J = \int_0^{\infty} e^{-A^3} A dA = 0.4513726464$$

Dengan demikian solusi sistem reverse osmosis yang diperoleh pada penelitian ini adalah :

$$Q(x, 0) = \frac{3^{-\frac{1}{3}} q L_0}{0.4513726464 P} \left(\frac{Ph}{v_0} \right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}} + L_0$$

Persamaan ini akan digunakan untuk menentukan kadar polutan pada koordinat $(x, 0)$ pada media berpori sistem reverse osmosis dengan pendekatan aliran fluida dengan persamaan adveksi-difusi.

PENUTUP

Dari pembahasan hasil sebelumnya dapat disimpulkan bahwa pendekatan deterministik dengan metode integrasi Romberg orde-10 adalah hasil yang terbaik. Dalam pendekatan stokastik hasil yang

diperoleh sangat baik walaupun tingkat akurasinya masih lebih rendah jika dibandingkan dengan pendekatan deterministik tetapi metode perhitungan yang dihadirkan sangat efisien terutama untuk penulisan program. Dalam penelitian ini terdapat keterbatasan yaitu pendekatan stokastik terbatas hanya pada metode Monte Carlo saja.

REFERENSI

- Adrian G.Wills., T. B. (2023). Sequential Monte Carlo: A Unified Review. *Annual Reviews*, 159-182. <https://doi.org/10.1146/annurev-control-042920-015119>
- Ahmed Saeed., M. A. (2024). Mathematical modeling of reverse osmosis system design and performance. *Water Practice & Technology Vol 19 No 7*, 2681-2692. doi: 10.2166/wpt.2024.141
- Esteban M.V.M., P. A. (2022). A Comparative Analysis of Statistical Models and Mathematics in Reverse Osmosis Evaluation Processes as a Search Path to Achieve Better Efficiency. *Water* 2022,14,2485, 1-19. <https://doi.org/10.3390/w14162485>
- Esteban M.V.M., P. A. (2022). Reverse Osmosis Modeling Study of Lead and Arsenic Removal from Drinking Water in Tarija and La Paz, Bolivia. *Processes* 2022, 10, 1-21. <https://doi.org/10.3390/pr10091889>
- Hadeer K. M., A. F. (2024). Mathematical modeling of osmotic membrane bioreactor process for oily wastewater. *Water Science & Technology Vol 90 No 7*, 2230-2250. doi: 10.2166/wst.2024.318
- Herbert, S. (2022). Quantum Monte Carlo Integration: The Full Advantage Quantum Monte Carlo Integration: The Full Advantage in Minimal Circuit Depth. *Quantum* 6, 823 (2022)., 823-842. <https://doi.org/10.22331/q-2022-09-29-823>
- Huliinko S.V., K. Y. (2020). Modern Trends in the Mathematical Simulation of Pressure-Driven Membrane Processes. *Journal of Engineering Sciences, Vol. 7(1)*, F1-F21. doi: 10.21272/jes.2020.7(1).f1
- Huliinko S.V., K. Y. (2022). Simulation of Reverse Osmosis Process: Novel Approaches and Development trends. *Journal Of Engineering Scinces, Volume 9, Issue 1*, F6-F36. doi: 10.21272/jes.2022.9(2).f2
- Iqbal M. Batiha., R. S.-N. (2024). Composite Fractional Trapezoidal Rule with Romberg Integration. *CMES*, 2024, vol.140, no.3, 2729-2745. <https://doi.org/10.32604/cmes.2024.051588>
- Muhammad Abdul Gani., A. U. (2024). Comparison of Numerical Integration with Trapezium and Romberg Methods Using Hypertext Preprocessor Program. *GeoScienceEd* 5(3) (2024), 425-430. <https://doi.org/10.29303/geoscienceed.v5i3.394>
- Paola A. A.T., E. M. (2023). Mathematical and Statistical Evaluation of Reverse Osmosis in the Removal of Manganese as aWay to Achieve Sustainable Operating Parameters. *Membranes*, 1-22. <https://doi.org/10.3390/membranes13080724>
- Saloua Helali., A. B.-A. (2013). A Lyapunov-Sylvester numerical method for solving a reverse osmosis model. *AIMS Mathematics*,9(7), 17531-17554. doi: [10.3934/math.2024852](https://doi.org/10.3934/math.2024852)
- Samad Noeiaghdam., S. M. (2025). A Novel Approach for Improving Reverse OsmosisModel Accuracy: Numerical Optimization for Water Purification Systems. *Mathematics, Volume 13, Issue 3, MDPI*, 1-22. <https://doi.org/10.3390/math13030459>
- Venelin Todorov., I. S. (2019). Quasi-Monte Carlo Methods Based On Sobol And Halton Sequences For Computation Of Multi Dimensional Integrals Applied In Security Systems . *Journal scientific and applied research, vol. 16*, 16-22. <https://doi.org/10.46687/jsar.v16i1.259>
- Sitompul, H. A., Tarigan, K., Sholeha, D., & Sitompul, H. A. (2025). Impression: Jurnal Teknologi dan Informasi Monte Carlo Implementation on Bisection and Regula Falsi Methods for Finding Multiple Roots of Polynomial and Exponential Equations. In *Jurnal Teknologi dan Informas* (Vol. 4, Issue 2).