

Analisa Non Linear Dua Dimensi Menggunakan Teori Large Deflection

Toni Hartono Bagio¹, Eugene Yudhistira Baggio²

¹Department of Civil Engineering, Universitas Abdurrah, Pekanbaru, Indonesia

²Department of Civil Engineering, Sepuluh Nopember Institute of Technology, Surabaya, Indonesia

ARTICLE INFO

Article history:

Received: 24 Juli 2025

Revised: 18 Agustus 2025

Accepted: 25 Agustus 2025

Keywords:

Nonlinear analysis

Nonlinear material

Nonlinear geometry

Large Deflection Theory

Published by

Impressio : Jurnal Teknologi dan Informasi

Copyright © 2025 by the Author(s) | This is an open-access article distributed under the Creative Commons Attribution which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



ABSTRACT

Dalam analisa struktur, ada dua macam cara untuk menyelesaikan yaitu analisa linear dan non linear. Untuk masalah linear penyelesaiannya dapat dilakukan dengan metode konvensional seperti: Cross, Takabeya dll. Sedang untuk analisa non linear ada dua macam type yakni : material non linear dan geometri non linear. Teori Large Deflection termasuk kategori Geometri Non Linear, dimana defelction yang terjadi adalah cukup besar, yang dapat mempengaruhi perubahan geometri strukturnya. Metode Analisa Matrix dikembangkan dari sifat linear dari suatu struktur. Untuk menyelesaikan masalah non linear, pembebanan diubaha menjadi beban yang lebih kecil, sedang batasan permayalahan yang dibahas adalah analisa Plane Frame, material linear elastis, shear deformasi diabaikan, thermal effect diabaikan, element adalah prismatic.

For linear problems, conventional methods such as Cross and Takabeya can be used to solve them. Nonlinear analysis, on the other hand, involves two types: nonlinear material and nonlinear geometry. Large Deflection Theory falls under the category of Nonlinear Geometry, where the resulting deflection is large enough to affect the structural geometry.

The Matrix Analysis method is developed from the linear nature of a structure. To solve nonlinear problems, the load is converted to a smaller load. The problem constraints discussed are Plane Frame analysis, linear elastic material, shear deformation is ignored, thermal effects are ignored, and the element is prismatic.

Corresponding Author:

Toni Hartono Bagio

Department of Civil Engineering, Universitas Abdurrah, Pekanbaru, Indonesia

Jl. Riau Ujung No. 73, Tampan, Air Hitam, Payung Sekaki, Air Hitam, Kec. Payung Sekaki, Kota Pekanbaru, Riau, Indonesia 28291

Email: tony@univrab.ac.id

PENDAHULUAN

Dengan berkembangnya perhitungan analisa struktur, metode untuk menghitung gaya-gaya dalam semakin berkembang juga, yakni untuk menghitung pertambahan momen-momen sekunder, antara lain adalah dengan metode $P-\Delta$ effect, teori Large Deflection. Pada artikel ini dibatasi untuk portal bidang elastic (Elastic Plane Frame), material linear elastis, shear deformasi diabaikan, thermal effect diabaikan, element adalah prismatic. Sedangkan untuk elasto-plastis, plastis, portal ruang (Space Frame), element non prismatic, material non linear, tidak dibahas, demikian juga terhadap efek akibat perubahan temperatur diabaikan.

Metode Flexibility, besaran yang tak diketahui adalah gaya kelebihan (*redundant*) yang dipilih secara sembarang, sedang dalam metode Stiffness, yang tidak diketahui adalah perpindahan titik nodal. Jadi jumlah yang tidak diketahui dalam metode Stiffness sama dengan jumlah derajat kinematis tak tentu (degree of freedom) dari struktur. Metode Stiffness dikembangkan dari persamaan keseimbangan titik nodal yang ditulis dalam koefisien kekakuan dan perpindahan titik nodal yang tidak diketahui. Oleh karena itu Metode Stiffness adalah Metode yang terutama dipakai dalam Analisa Struktur dengan menggunakan Matrix, yang merupakan salah satu kelebihan dibanding dengan Metode Flexibility dan mudah dipakai dalam komputer

METODE PENELITIAN

Stiffness Matrix

Stiffness Matrix untuk analisa Large Deflection dikembangkan sesuai dengan teori Small Deflection dengan menambahkan dari Stiffness Matrix akibat perubahan Geometrinya, menurut (Weaver et al.) adalah:

$$S_L = S_E + S_G \quad (1)$$

Dimana :

S_L : Stiffness Matrix untuk Large Deflection

S_E : Stiffness Matrix Elastis

S_G : Stiffness Matrix akibat perubahan Geometri (tergantung dari perubahan displacement)

Langkah-langkah pertambahan displacement dapat dilihat pada table 1.

Tabel 1. Stiffness matrix dan Deflection		
Langkah	Stiffness Matrix	Deflection
1	$S_E(D0) + S_G(D0)$	$\Delta D1$
2	$S_E(D1) + S_G(D1)$	$\Delta D2$
3	$S_E(D2) + S_G(D2)$	$\Delta D3$
..	..	...
..	..	...
n	$S_E(Dn-1) + S_G(Dn-1)$	ΔDn
Total Displacement		$Dn = \sum_{i=1}^n \Delta D_i$

Pada langkah pertama struktur dianggap kedudukan geometri belum berubah, S_G sangat tergantung dari perubahan geometri, sehingga :

$$S_G(D0) = 0 \quad (2)$$

Tabel 1. menunjukkan langkah-langkah untuk mendapatkan harga displacement. Dimana beban luar adalah P, sehingga dalam melakukan perhitungan beban P dibagi menjadi bagian yang lebih kecil, sehingga :

$$P_i = \frac{P}{n} \quad (3)$$

Dimana :

P_i = Beban luar yang dipakai dalam analisa *Large Deflection*

P = Beban luar yang real.

n = banyaknya pembagian pembebanan / langkah

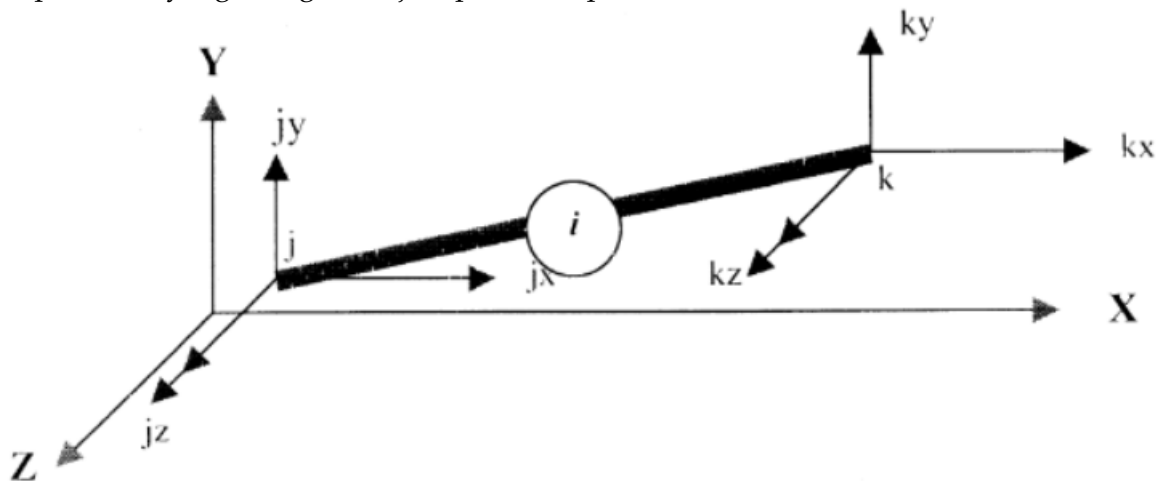
Adapun Stiffness Elastis Matrix adalah sebagai berikut :

$$S_E = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} u\ell^2 & & & & & \\ 0 & 12 & & & & \\ 0 & 6\ell & 4\ell^2 & & & \\ -u\ell^2 & 0 & 0 & u\ell^2 & & \\ 0 & -12 & -6\ell & 0 & 12 & \\ 0 & 6\ell & 2\ell^2 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad \text{simetris} \quad (4)$$

$$S_G = \frac{P}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 6/5 & & & & \\ 0 & \ell & 2\ell^2/15 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -6/5 & -\ell/10 & 0 & 6/5 & \\ 0 & \ell/10 & \ell^2/10 & 0 & -\ell/10 & 2\ell^2/15 \end{bmatrix} \quad \text{simetris} \quad (5)$$

PERAKITAN STIFFNESS MATRIX

Sebelum membentuk Stiffness Matrix secara keseluruhan, pada batang i (lihat gambar 1) ada 3 perpindahan yang mungkin terjadi pada setiap titik.



Gambar 1. Perpindahan ujung pada batang i

Perpindahan ini adalah translasi titik nodal dalam arah x dan y serta rotasi dalam arah z . Index perpindahan pada masing-masing titik nodal ditentukan sebagai berikut:

- j_x = index untuk translasi titik j pada arah x
- j_y = index untuk translasi titik j pada arah y
- j_z = index untuk rotasi titik j pada arah z
- k_x = index untuk translasi titik k pada arah x
- k_y = index untuk translasi titik k pada arah y
- k_z = index untuk rotasi titik k pada arah z

gambar 1 menunjukkan perpindahan ujung untuk setiap batang/element

Untuk membentuk Stiffness Matrix pada titik secara teratur, dilakukan cara sebagai berikut : Stiffness Matrix untuk sumbu global diturunkan untuk batang i pada portal adalah :

$$S_{MS} = \begin{bmatrix} +S_{11} & & & & & \\ +S_{12} & +S_{22} & & & & \\ +S_{13} & +S_{23} & +S_{33} & & & \\ -S_{11} & -S_{12} & -S_{13} & +S_{11} & & \\ -S_{12} & -S_{22} & -S_{23} & +S_{12} & S_{22} & \\ +S_{12} & +S_{23} & +S_{36} & -S_{13} & -S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \quad \text{simetris} \quad (6)$$

dimana :

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{L1} \cos^2 \alpha + S_{L4} \sin^2 \alpha & ; & \quad S_{12} = (S_{L1} - S_{L4}) \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ S_{13} &= -S_{L3} \sin \alpha & ; & \quad S_{22} = S_{L4} \cos^2 \alpha + S_{L1} \sin^2 \alpha \\ S_{23} &= S_{L3} \cos \alpha & ; & \quad S_{33} = S_{L2} \\ S_{36} &= S_{L5} \end{aligned}$$

$$S_{L1} = \frac{EA}{\ell}$$

$$S_{L2} = \frac{4EI}{\ell} + \frac{2P\ell}{15}$$

$$S_{L3} = \frac{6EI}{\ell^2} + \frac{P}{10}$$

$$S_{L4} = \frac{12EI}{\ell^3} + \frac{6P}{5\ell}$$

$$S_{L5} = \frac{2EI}{\ell} - \frac{6P}{30}$$

Pada term pertama adalah sifat umum dari analisa Matrix (Weaver, et, al) untuk portal bidang, sedang pada term kedua adalah akibat perubahan dari kondisi geometris. Element yang sesuai dari Matrix S_{MS} untuk batang/element i ini ditransfer ke Stiffness Matrix titik keseluruhan S_{FF} dengan menyatukan *subscript* pada element tersebut. Kolom pertama pada Matrix S_{MS} i akibat translasi satu-satuan ujung j pada batang/element i dalam arah x (index jx). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, jx) = \sum S_{MS} + S_{MS11}(i) \quad (7.a)$$

$$S_{FF}(jy, jx) = \sum S_{MS} + S_{MS21}(i) \quad (7.b)$$

$$S_{FF}(jz, jx) = \sum S_{MS} + S_{MS31}(i) \quad (7.c)$$

$$S_{FF}(kx, jx) = S_{MS41}(i) \quad (7.d)$$

$$S_{FF}(ky, jx) = S_{MS51}(i) \quad (7.e)$$

$$S_{FF}(kz, jx) = S_{MS61}(i) \quad (7.f)$$

Persamaan serupa akibat translasi satu-satuan ujung j pada batang/element i dalam arah y (index jy). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, jy) = \sum S_{MS} + S_{MS12}(i) \quad (8.a)$$

$$S_{FF}(jy, jy) = \sum S_{MS} + S_{MS22}(i) \quad (8.b)$$

$$S_{FF}(jz, jy) = \sum S_{MS} + S_{MS32}(i) \quad (8.c)$$

$$S_{FF}(kx, jy) = S_{MS42}(i) \quad (8.d)$$

$$S_{FF}(ky, jy) = S_{MS52}(i) \quad (8.e)$$

$$S_{FF}(kz, jy) = S_{MS62}(i) \quad (8.f)$$

Sedangkan untuk rotasi satu-satuan ujung j pada batang/ element i dalam arah z (index jz). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, jz) = \sum S_{MS} + S_{MS13}(i) \quad (9.a)$$

$$S_{FF}(jy, jz) = \sum S_{MS} + S_{MS23}(i) \quad (9.b)$$

$$S_{FF}(jz, jz) = \sum S_{MS} + S_{MS33}(i) \quad (9.c)$$

$$S_{FF}(kx, jz) = S_{MS43}(i) \quad (9.d)$$

$$S_{FF}(ky, jz) = S_{MS53}(i) \quad (9.e)$$

$$S_{FF}(kz, jz) = S_{MS63}(i) \quad (9.f)$$

Persamaan untuk mentransfer kolom keempat pada Matrix S_{MS} akibat translasi satu-satuan ujung k pada batang/ element i dalam arah x (index kx). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut:

$$S_{FF}(jx, kx) = S_{MS14}(i) \quad (10.a)$$

$$S_{FF}(jy, kx) = S_{MS24}(i) \quad (10.b)$$

$$S_{FF}(jz, kx) = S_{MS34}(i) \quad (10.c)$$

$$S_{FF}(kx, kx) = \sum S_{MS} + S_{MS44}(i) \quad (10.d)$$

$$S_{FF}(ky, kx) = \sum S_{MS} + S_{MS54}(i) \quad (10.e)$$

$$S_{FF}(kz, kx) = \sum S_{MS} + S_{MS64}(i) \quad (10.f)$$

Demikian juga untuk arah y adalah akibat translasi satu-satuan ujung k pada batang/ element i dalam arah y (index ky). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, ky) = S_{MS15}(i) \quad (11.a)$$

$$S_{FF}(jy, ky) = S_{MS25}(i) \quad (11.b)$$

$$S_{FF}(jz, ky) = S_{MS35}(i) \quad (11.c)$$

$$S_{FF}(kx, ky) = \sum S_{MS} + S_{MS45}(i) \quad (11.d)$$

$$S_{FF}(ky, ky) = \sum S_{MS} + S_{MS55}(i) \quad (11.e)$$

$$S_{FF}(kz, ky) = \sum S_{MS} + S_{MS65}(i) \quad (11.f)$$

Terakhir untuk rotasi satu-satuan ujung k pada batang/ element i dalam arah z (index kz). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, kz) = S_{MS16}(i) \quad (12.a)$$

$$S_{FF}(jy, kz) = S_{MS26}(i) \quad (12.b)$$

$$S_{FF}(jz, kz) = S_{MS36}(i) \quad (12.c)$$

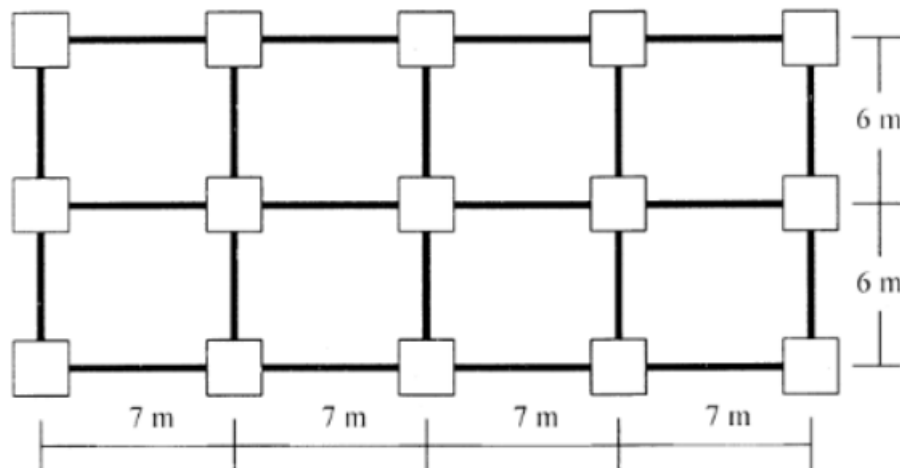
$$S_{FF}(kx, kz) = \sum S_{MS} + S_{MS46}(i) \quad (12.d)$$

$$S_{FF}(ky, kz) = \sum S_{MS} + S_{MS56}(i) \quad (12.e)$$

$$S_{FF}(kz, kz) = \sum S_{MS} + S_{MS66}(i) \quad (12.f)$$

PEMBAHASAN

Denah Typical dari model yang dianalisa oleh [Bagio, T.H ; Cheng H.W.] adalah sebagai berikut:



Gambar 2. Portal 2x4 bentang

Analisa struktur yang digunakan dengan 12 lantai, material yang digunakan adalah beton, dengan ketinggian setiap lantai adalah 4 m. Gaya Horizontal didapatkan dengan menggunakan Static Equivalent sesuai dengan peraturan Gempa (SNI 1726), sedang untuk Pembebanan Statis digunakan peraturan SNI 2020.

Portal dua dimensi dengan 2 bentang, mempunyai data sebagai berikut :

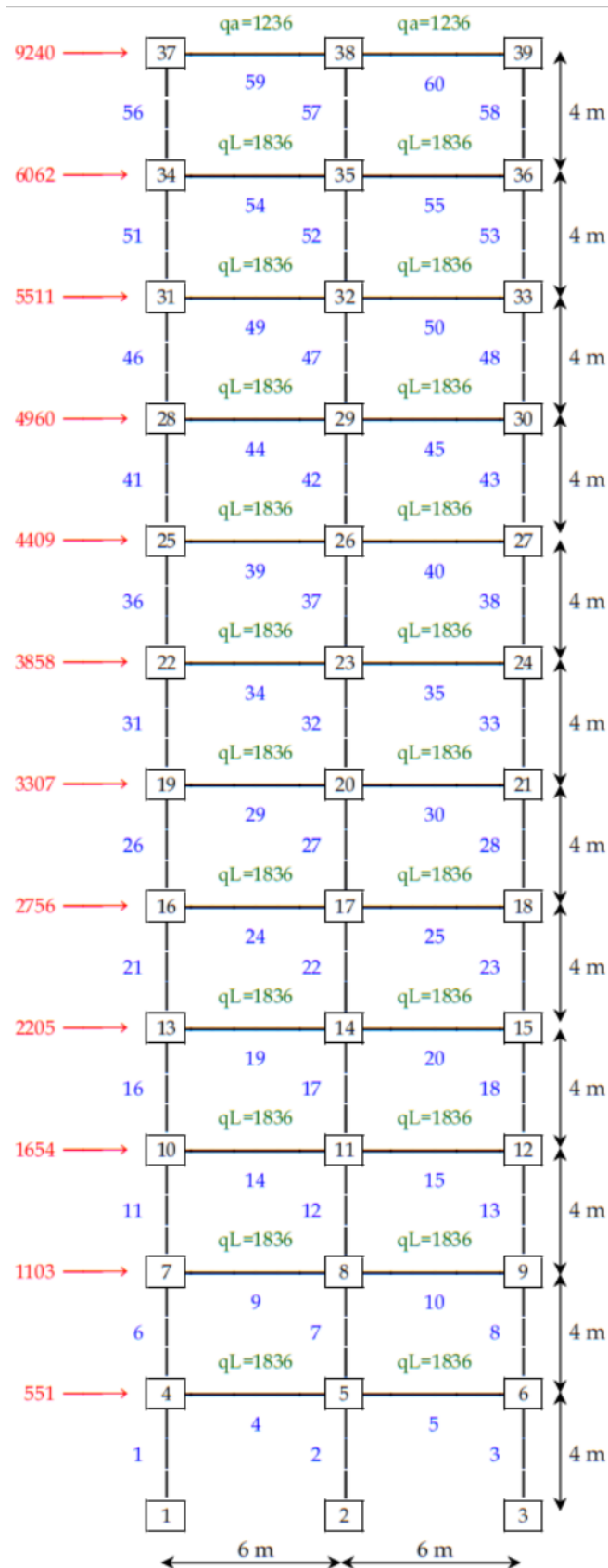
Beban atap = 1236 kg/m ; beban lantai = 1836 kg/m.

Dimensi : balok beton, $b = 30$ cm, $h = 50$ cm ; kolom beton, $b = h = 50$ cm

Ebeton = 2×10^6 kg/cm²

Beban yang bekerja diperlihatkan pada gambar 3.

Berdasarkan data-data diatas, dapat dibuat suatu perbandingan dengan tiga metode, yakni Small Deflection, Large Deflection (Tony H.B, Cheng H.W.), P-Δ (Metode Wood) (Wood et al, 1976), (Wood et al, 1977).



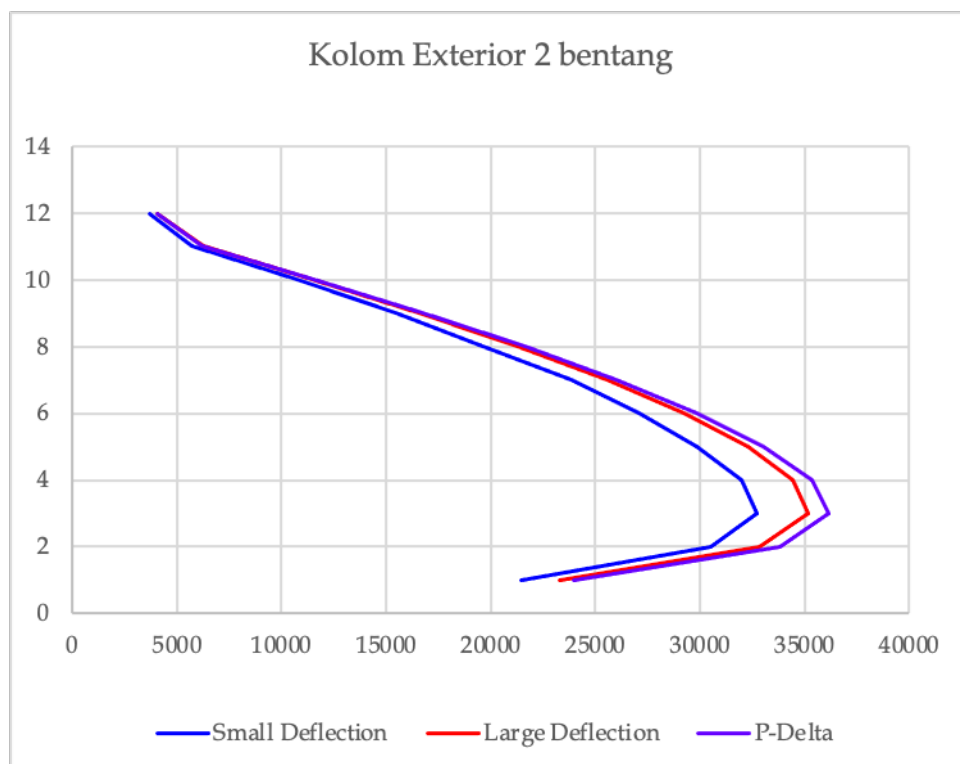
Gambar 3. Pembebanan pada portal 2 dimensi, pada sumbu lemah (sumbu Y)

HASIL PERHITUNGAN

Hasil perhitungan analisa 2(dua) dimensi dengan metode *Small Deflection*, *Large Deflection*, *P-Delta*, masing-masing momen pada tiap lantai adalah sebagai berikut :

Tabel 2. Momen Kolom Exterior (kg-m)

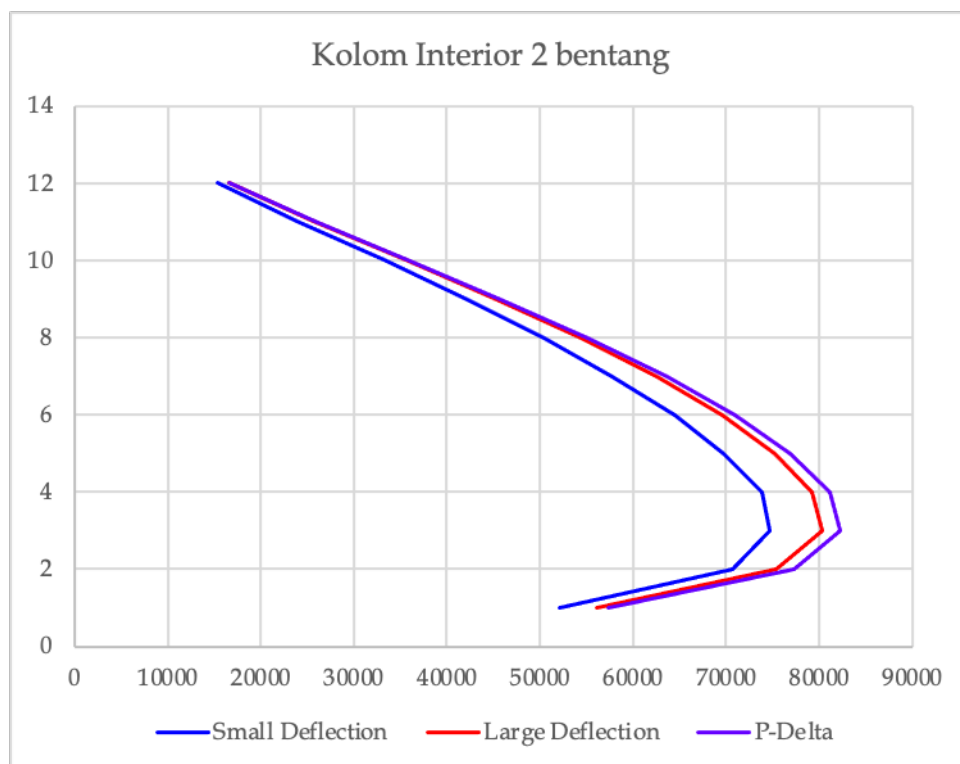
Lantai	Small	Large	P Delta
1	21475.55	23319.02	24006.33
2	30532.13	32861.52	33838.95
3	32742.93	35169.84	36185.06
4	31977.27	34447.85	35377.74
5	29847.89	32274.41	33066.02
6	27118.13	29230.86	29867.15
7	23866.68	25537.21	26018.84
8	19624.37	21289.02	21625.78
9	15453.99	16557.5	16766.26
10	10740.39	11464.08	11568.22
11	5733.543	6283.954	6234.978
12	3727.24	4051.348	4088.554



Gambar 4. Hasil perbandingan Momen Kolom Exterior

Tabel 3. Momen Kolom Interior (kg-m)

Lantai	Small	Large	P Delta
1	52122.84	56109.29	57415.28
2	70718.78	75378.76	77332.22
3	74727.41	80278.48	82338.34
4	73821.37	79233.09	81124.98
5	69780.85	75304.4	76914.99
6	64576.35	69630.56	70924.21
7	57794.87	62642.75	63620.96
8	50416.84	54526.55	55210.49
9	42192.75	45348.6	45853.82
10	33189.71	35552.23	35766.19
11	23844.31	25677.62	25761.53
12	15421.52	16528.97	16625.39



Gambar 5. Hasil perbandingan Momen Kolom Interior

PENUTUP

Dari hasil analisis dapat disimpulkan bahwa pembagian pembebanan (n) yang digunakan dalam perhitungan *large deflection* paling efektif berada pada rentang tiga hingga lima kali, karena nilai di atas kisaran tersebut tidak lagi memberikan perbedaan hasil yang signifikan. Analisis menunjukkan bahwa metode P- Δ (Wood) memberikan hasil yang relatif dekat dengan pendekatan *large deflection*, di mana pada gedung berlantai dua belas terjadi penambahan momen kolom sekitar 6–8 persen dibandingkan dengan teori *small deflection*.

Selain itu, hasil *large deflection* secara konsisten menghasilkan nilai yang lebih rendah dibandingkan metode *second order effect* lainnya. Sementara itu, pada portal dengan bentang 4x2, pendekatan *small deflection* cenderung menghasilkan nilai yang *under estimate*, sedangkan *large deflection* dan metode *second order effect* lainnya justru memberikan hasil yang *over estimate*.

Dengan demikian, dapat ditegaskan bahwa penggunaan analisis *large deflection* lebih representatif untuk menggambarkan perilaku struktur, karena mampu memberikan hasil yang lebih realistis dibandingkan dengan teori *small deflection* yang berpotensi meremehkan respons struktur.

REFERENSI

American Concrete Institute, 2011

Bagio, Tony H., Cheng H.W. "Program Komputer untuk Elastic Plane Frame menggunakan Large Deflection Theory", Universitas Kristen Petra, 1987

Bambang Budiono, et, al, "Contoh Desain Bangunan Tahan Gempa", Penerbit ITB, 2017.

National Building Code of Canada (NBCC), 2005

Przemieniecki, J.S. "Theory of Matrix Structural Analysis", Mc Graw-Hill Company, 1968.

SNI 1726:2019 Tata Cara Perencanaan Ketahanan Gempa untuk Struktur Bangunan Gedung dan Non Gedung, 2019

SNI 2847:2019 Persyaratan Beton Struktural untuk Bangunan Gedung, 2019

SNI 1727:2020 Beban Minimum untuk Perancangan Bangunan Gedung, 2020

Weaver, W., Gere, J.M. "Matrix Analysis of Frame Structures, Second Edition.", D. Van Nostrand Company, 1980

Wood, B.R, Beaulieu, D. and Adams, P.F. "Column Design by P-Delta Method", proceeding, ASCE, Vol, 103 ST 8, August 1977, page 1691

Wood. B.R, Beaulieu, D. and Adams, P.F. "Further Aspects of Design by P-Δ Model", ASCE, Vol, 102, Issue 3, Mar 1976, <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0004292>