

Analisa Struktur Non Linear Dua Dimensi Menggunakan Teori Large Deflection

Toni Hartono Bagio¹, Eugene Yudhistira Baggio²

¹ Department of Civil Engineering, Universitas Abdurrah, Pekanbaru, Indonesia

² Department of Civil Engineering, Sepuluh Nopember Institute of Technology, Surabaya, Indonesia

Email : ¹tony@univrab.ac.id, ²eugenebaggio@gmail.com

ARTICLE INFO

Article history:

Received: 10 Oktober 2024

Revised: 28 Oktober 2024

Accepted: 28 November 2024

Keywords:

Nonlinear analysis

Nonlinear material

Nonlinear geometry

Large Deflection Theory

Published by

Impressio : Jurnal Teknologi dan Informasi

Copyright © 2025 by the Author(s) | This is an open-access article distributed under the Creative Commons Attribution which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



ABSTRACT

Dalam analisa struktur, ada dua macam cara untuk menyelesaikan yaitu analisa linear dan non linear. Untuk masalah linear penyelesaiannya dapat dilakukan dengan metode konvensional seperti: Cross, Takabeya dll. Sedang untuk analisa non linear ada dua macam type yakni: material non linear dan geometri non linear. Teori Large Deflection termasuk kategori Geometri Non Linear dimana deflection yang terjadi adalah cukup besar, yang dapat mempengaruhi perubahan geometri strukturnya. Metode Analisa Matrix dikembangkan dari sifat linear dari suatu struktur. Untuk menyelesaikan masalah non linear, pembebanan diubah menjadi beban yang lebih kecil, sedang batasan permayalahan yang dibahas adalah analisa Plane Frame, material linear elastis, shear deformasi diabaikan, thermal effect diabaikan, element adalah prismatic.

In structural analysis, there are two ways to solve it, namely linear and non-linear analysis. For linear problems, the solution can be done with conventional methods such as: Cross, Takabeya, etc. While for non-linear analysis, there are two types, namely: non-linear material and non-linear geometry. The Large Deflection Theory is included in the Non-Linear Geometry category where the deflection that occurs is quite large, which can affect changes in the geometry of the structure. The Matrix Analysis Method was developed from the linear nature of a structure. To solve non-linear problems, the load is changed to a smaller load, while the problem constraints discussed are Plane Frame analysis, linear elastic material, shear deformation is ignored, thermal effects are ignored, the element is prismatic.

Corresponding Author:

Toni Hartono Bagio

Department of Civil Engineering, Universitas Abdurrah, Pekanbaru, Indonesia

Jl. Riau Ujung No. 73, Tampan, Air Hitam, Payung Sekaki, Air Hitam, Kec. Payung Sekaki, Kota Pekanbaru, Riau, Indonesia 28291

Email: tony@univrab.ac.id

PENDAHULUAN

Dengan berkembangnya perhitungan analisa struktur, metode untuk menghitung gaya-gaya dalam semakin berkembang juga, yakni untuk menghitung pertambahan momen-momen sekunder, antara lain adalah dengan metode $P-\Delta$ effect, teori Large Deflection. Pada artikel ini dibatasi untuk portal bidang elastic (Elastic Plane Frame), material linear elastis, shear deformasi diabaikan, thermal effect diabaikan, element adalah prismatic. Sedangkan untuk elasto-plastis, plastis, portal ruang (*Space Frame*), element non prismatic, material non linear, tidak dibahas, demikian juga terhadap efek akibat perubahan temperatur diabaikan.

Metode Flexibility, besaran yang tak diketahui adalah gaya kelebihan (*redundant*) yang dipilih secara sembarang, sedang dalam metode Stiffness, yang tidak diketahui adalah perpindahan titik nodal. Jadi jumlah yang tidak diketahui dalam metode Stiffness sama dengan jumlah derajat kinematis tak tentu (degree of freedom) dari struktur. Metode Stiffness dikembangkan dari persamaan keseimbangan titik

nodal yang ditulis dalam koefisien kekakuan dan perpindahan titik nodal yang tidak diketahui. Oleh karena itu Metode Stiffness adalah Metode yang terutama dipakai dalam Analisa Struktur dengan menggunakan Matrix, yang merupakan salah satu kelebihan dibanding dengan Metode Flexibility dan mudah dipakai dalam komputer

METODE PENELITIAN

Stiffness Matrix

Stiffness Matrix untuk analisa Large Deflection dikembangkan sesuai dengan teori Small Deflection dengan menambahkan dari Stiffness Matrix akibat perubahan Geometrinya, menurut (Weaver et al.) adalah:

$$S_L = S_E + S_G \quad (1)$$

Dimana :

S_L : Stiffness Matrix untuk Large Deflection

S_E : Stiffness Matrix Elastis

S_G : Stiffness Matrix akibat perubahan Geometri (tergantung dari perubahan displacement)

Langkah-langkah pertambahan displacement dapat dilihat pada table 1.

Tabel 1. Stiffness matrix dan Deflection

Langkah	Stiffness Matrix	Deflection
1	$S_E(D0) + S_G(D0)$	$\Delta D1$
2	$S_E(D1) + S_G(D1)$	$\Delta D2$
3	$S_E(D2) + S_G(D2)$	$\Delta D3$
..	..	...
..	..	...
n	$S_E(Dn-1) + S_G(Dn-1)$	ΔDn
Total Displacement		$Dn = \sum_{i=1}^n \Delta D_i$

Pada langkah pertama struktur dianggap kedudukan geometri belum berubah, S_G sangat tergantung dari perubahan geometri, sehingga :

$$S_G(D0) = 0 \quad (2)$$

Tabel 1. menunjukkan langkah-langkah untuk mendapatkan harga displacement. Dimana beban luar adalah P, sehingga dalam melakukan perhitungan beban P dibagi menjadi bagian yang lebih kecil, sehingga :

$$P_i = \frac{P}{n} \quad (3)$$

Dimana :

P_i = Beban luar yang dipakai dalam analisa *Large Deflection*

P = Beban luar yang real.

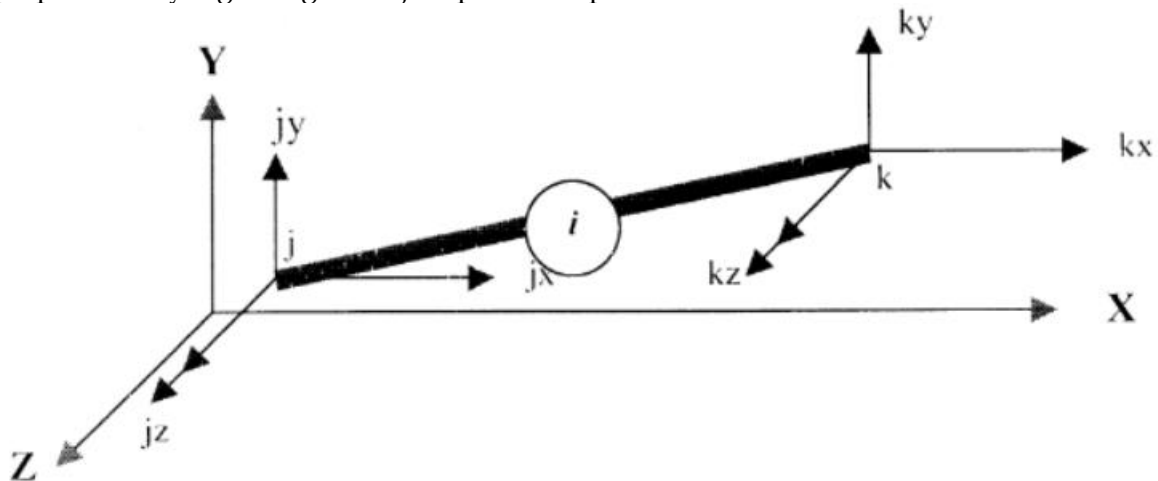
n = banyaknya pembagian pembebanan / langkah
Adapun Stiffness Elastis Matrix adalah sebagai berikut :

$$S_E = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} u\ell^2 & & & & & \\ 0 & 12 & & & & \\ 0 & 6\ell & 4\ell^2 & & & \\ -u\ell^2 & 0 & 0 & u\ell^2 & & \\ 0 & -12 & -6\ell & 0 & 12 & \\ 0 & 6\ell & 2\ell^2 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad \text{simetris} \quad (4)$$

$$S_G = \frac{P}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 6/5 & & & & \\ 0 & \ell & 2\ell^2/15 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -6/5 & -\ell/10 & 0 & 6/5 & \\ 0 & \ell/10 & \ell^2/10 & 0 & -\ell/10 & 2\ell^2/15 \end{bmatrix} \quad \text{simetris} \quad (5)$$

PERAKITAN STIFFNESS MATRIX

Sebelum membentuk Stiffness Matrix secara keseluruhan, pada batang i (lihat gambar 1) ada 3 perpindahan yang mungkin terjadi pada setiap titik.



Gambar 1. Perpindahan ujung pada batang i

Perpindahan ini adalah translasi titik nodal dalam arah x dan y serta rotasi dalam arah z . Index perpindahan pada masing-masing titik nodal ditentukan sebagai berikut:

- j_x = index untuk translasi titik j pada arah x
- j_y = index untuk translasi titik j pada arah y
- j_z = index untuk rotasi titik j pada arah z
- k_x = index untuk translasi titik k pada arah x
- k_y = index untuk translasi titik k pada arah y
- k_z = index untuk rotasi titik k pada arah z

gambar 1 menunjukkan perpindahan ujung untuk setiap batang/element

Untuk membentuk Stiffness Matrix pada titik secara teratur, dilakukan cara sebagai berikut : Stiffness Matrix untuk sumbu global diturunkan untuk batang i pada portal adalah :

$$S_{MS} = \begin{bmatrix} +S_{11} & & & & & \\ +S_{12} & +S_{22} & & & & \\ +S_{13} & +S_{23} & +S_{33} & & & \\ -S_{11} & -S_{12} & -S_{13} & +S_{11} & & \\ -S_{12} & -S_{22} & -S_{23} & +S_{12} & S_{22} & \\ +S_{12} & +S_{23} & +S_{36} & -S_{13} & -S_{23} & S_{33} \end{bmatrix} \quad \text{simetris} \quad (6)$$

dimana :

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{L1} \cos^2 \alpha + S_{L4} \sin^2 \alpha & ; & \quad S_{12} = (S_{L1} - S_{L4}) \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ S_{13} &= -S_{L3} \sin \alpha & ; & \quad S_{22} = S_{L4} \cos^2 \alpha + S_{L1} \sin^2 \alpha \\ S_{23} &= S_{L3} \cos \alpha & ; & \quad S_{33} = S_{L2} \\ S_{36} &= S_{L5} \end{aligned}$$

$$S_{L1} = \frac{EA}{\ell}$$

$$S_{L2} = \frac{4EI}{\ell} + \frac{2P\ell}{15}$$

$$S_{L3} = \frac{6EI}{\ell^2} + \frac{P}{10}$$

$$S_{L4} = \frac{12EI}{\ell^3} + \frac{6P}{5\ell}$$

$$S_{L5} = \frac{2EI}{\ell} - \frac{6P}{30}$$

Pada term pertama adalah sifat umum dari analisa Matrix (Weaver, et, al) untuk portal bidang, sedang pada term kedua adalah akibat perubahan dari kondisi geometris. Element yang sesuai dari Matrix S_{MS} untuk batang/element i ini ditransfer ke Stiffness Matrix titik keseluruhan S_{FF} dengan menyatukan *subscript* pada element tersebut. Kolom pertama pada Matrix S_{MS} i akibat translasi satu-satuan ujung j pada batang/element i dalam arah x (index jx). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, jx) = \sum S_{MS} + S_{MS11}(i) \quad (7.a)$$

$$S_{FF}(jy, jx) = \sum S_{MS} + S_{MS21}(i) \quad (7.b)$$

$$S_{FF}(jz, jx) = \sum S_{MS} + S_{MS31}(i) \quad (7.c)$$

$$S_{FF}(kx, jx) = S_{MS41}(i) \quad (7.d)$$

$$S_{FF}(ky, jx) = S_{MS51}(i) \quad (7.e)$$

$$S_{FF}(kz, jx) = S_{MS61}(i) \quad (7.f)$$

Persamaan serupa akibat translasi satu-satuan ujung j pada batang/element i dalam arah y (index jy). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, jy) = \sum S_{MS} + S_{MS12}(i) \quad (8.a)$$

$$S_{FF}(jy, jy) = \sum S_{MS} + S_{MS22}(i) \quad (8.b)$$

$$S_{FF}(jz, jy) = \sum S_{MS} + S_{MS32}(i) \quad (8.c)$$

$$S_{FF}(kx, jy) = S_{MS42}(i) \quad (8.d)$$

$$S_{FF}(ky, jy) = S_{MS52}(i) \quad (8.e)$$

$$S_{FF}(kz, jy) = S_{MS62}(i) \quad (8.f)$$

Sedangkan untuk rotasi satu-satuan ujung j pada batang/element i dalam arah z (index jz). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, jz) = \sum S_{MS} + S_{MS13}(i) \quad (9.a)$$

$$S_{FF}(jy, jz) = \sum S_{MS} + S_{MS23}(i) \quad (9.b)$$

$$S_{FF}(jz, jz) = \sum S_{MS} + S_{MS33}(i) \quad (9.c)$$

$$S_{FF}(kx, jz) = S_{MS43}(i) \quad (9.d)$$

$$S_{FF}(ky, jz) = S_{MS53}(i) \quad (9.e)$$

$$S_{FF}(kz, jz) = S_{MS63}(i) \quad (9.f)$$

Persamaan untuk mentransfer kolom keempat pada Matrix S_{MS} akibat translasi satu-satuan ujung k pada batang/element i dalam arah x (index kx). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut:

$$S_{FF}(jx, kx) = S_{MS14}(i) \quad (10.a)$$

$$S_{FF}(jy, kx) = S_{MS24}(i) \quad (10.b)$$

$$S_{FF}(jz, kx) = S_{MS34}(i) \quad (10.c)$$

$$S_{FF}(kx, kx) = \sum S_{MS} + S_{MS44}(i) \quad (10.d)$$

$$S_{FF}(ky, kx) = \sum S_{MS} + S_{MS54}(i) \quad (10.e)$$

$$S_{FF}(kz, kx) = \sum S_{MS} + S_{MS64}(i) \quad (10.f)$$

Demikian juga untuk arah y adalah akibat translasi satu-satuan ujung k pada batang/element i dalam arah y (index ky). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, ky) = S_{MS15}(i) \quad (11.a)$$

$$S_{FF}(jy, ky) = S_{MS25}(i) \quad (11.b)$$

$$S_{FF}(jz, ky) = S_{MS35}(i) \quad (11.c)$$

$$S_{FF}(kx, ky) = \sum S_{MS} + S_{MS45}(i) \quad (11.d)$$

$$S_{FF}(ky, ky) = \sum S_{MS} + S_{MS55}(i) \quad (11.e)$$

$$S_{FF}(kz, ky) = \sum S_{MS} + S_{MS65}(i) \quad (11.f)$$

Terakhir untuk rotasi satu-satuan ujung k pada batang/element i dalam arah z (index kz). Kolom ini ditransfer ke Matrix S_{FF} adalah sebagai berikut :

$$S_{FF}(jx, kz) = S_{MS16}(i) \quad (12.a)$$

$$S_{FF}(jy, kz) = S_{MS26}(i) \quad (12.b)$$

$$S_{FF}(jz, kz) = S_{MS36}(i) \quad (12.c)$$

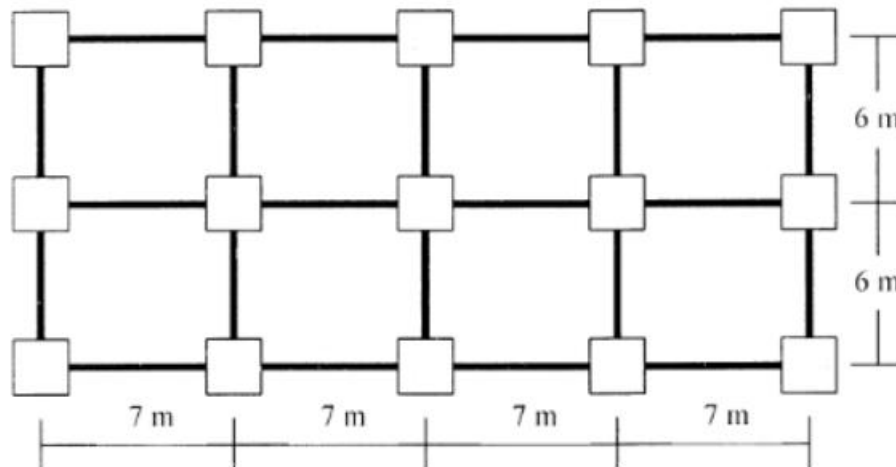
$$S_{FF}(kx, kz) = \sum S_{MS} + S_{MS46}(i) \quad (12.d)$$

$$S_{FF}(ky, kz) = \sum S_{MS} + S_{MS56}(i) \quad (12.e)$$

$$S_{FF}(kz, kz) = \sum S_{MS} + S_{MS66}(i) \quad (12.f)$$

PEMBAHASAN

Denah Typical dari model yang dianalisa oleh [Bagio, T.H ; Cheng H.W.] adalah sebagai berikut:



Gambar 2. Portal 2x4 bentang

Analisa struktur yang digunakan dengan 12 lantai, material yang digunakan adalah beton, dengan ketinggian setiap lantai adalah 4 m. Gaya Horizontal didapatkan dengan menggunakan Static Equivalent sesuai dengan peraturan Gempa (SNI 1726), sedang untuk Pembebanan Statis digunakan peraturan SNI 2020.

Portal dua dimensi dengan 2 bentang, mempunyai data sebagai berikut :

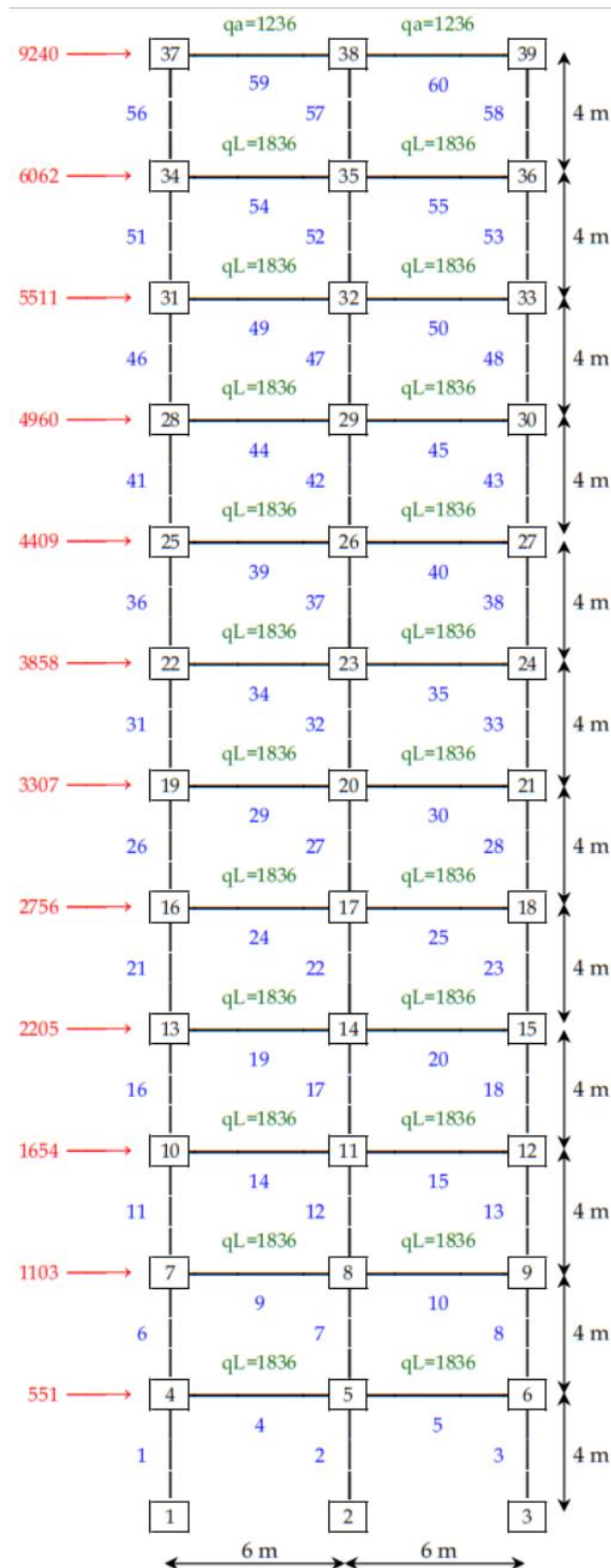
Beban atap = 1236 kg/m ; beban lantai = 1836 kg/m.

Dimensi : balok beton, $b = 30$ cm, $h = 50$ cm ; kolom beton, $b = h = 50$ cm

Ebeton = 2×10^6 kg/cm²

Beban yang bekerja diperlihatkan pada gambar 3.

Berdasarkan data-data diatas, dapat dibuat suatu perbandingan dengan tiga metode, yakni Small Deflection, Large Deflection (Tony H.B, Cheng H.W.), P-Δ (Metode Wood) (Wood et al, 1976), (Wood et al, 1977).

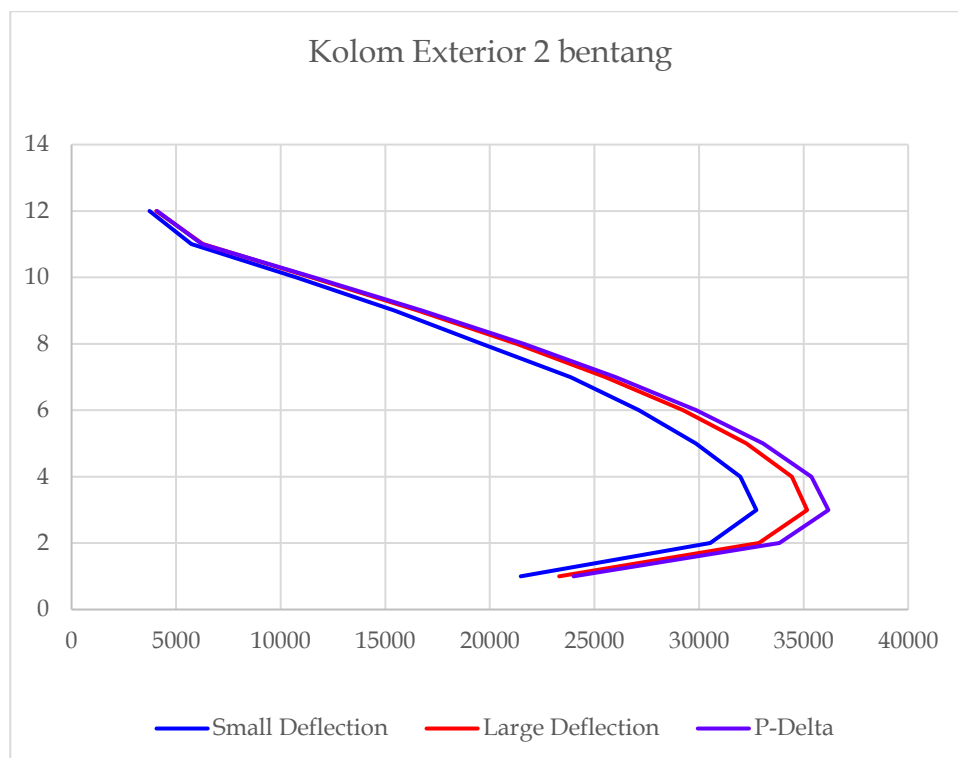


Gambar 3. Pembebanan pada portal 2 dimensi, pada sumbu lemah (sumbu Y)

HASIL PERHITUNGAN

Hasil perhitungan analisa 2(dua) dimensi dengan metode *Small Deflection*, *Large Deflection*, *P-Delta*, masing-masing momen pada tiap lantai adalah sebagai berikut :

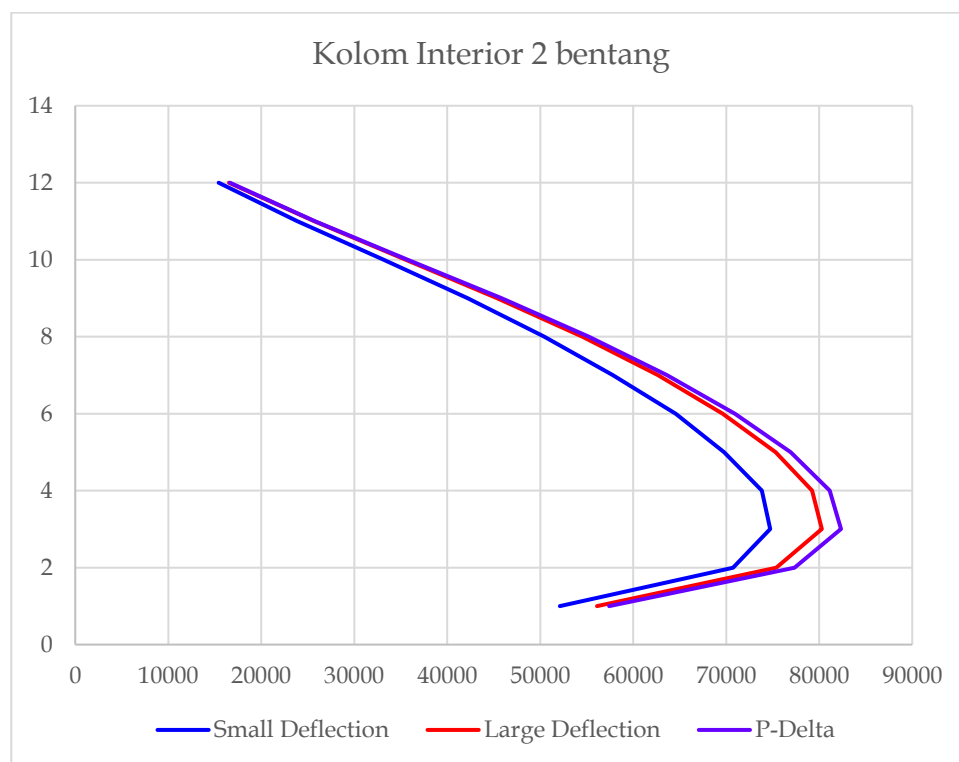
Tabel 2. Momen Kolom Exterior (kg-m)			
Lantai	Small	Large	P Delta
1	21475.55	23319.02	24006.33
2	30532.13	32861.52	33838.95
3	32742.93	35169.84	36185.06
4	31977.27	34447.85	35377.74
5	29847.89	32274.41	33066.02
6	27118.13	29230.86	29867.15
7	23866.68	25537.21	26018.84
8	19624.37	21289.02	21625.78
9	15453.99	16557.5	16766.26
10	10740.39	11464.08	11568.22
11	5733.543	6283.954	6234.978
12	3727.24	4051.348	4088.554



Gambar 4. Hasil perbandingan Momen Kolom Exterior

Tabel 3. Momen Kolom Interior (kg-m)

Lantai	Small	Large	P Delta
1	52122.84	56109.29	57415.28
2	70718.78	75378.76	77332.22
3	74727.41	80278.48	82338.34
4	73821.37	79233.09	81124.98
5	69780.85	75304.4	76914.99
6	64576.35	69630.56	70924.21
7	57794.87	62642.75	63620.96
8	50416.84	54526.55	55210.49
9	42192.75	45348.6	45853.82
10	33189.71	35552.23	35766.19
11	23844.31	25677.62	25761.53
12	15421.52	16528.97	16625.39



Gambar 5. Hasil perbandingan Momen Kolom Interior

PENUTUP

Dari beberapa percobaan pembagian pembebanan (n) yang baik untuk *large deflection* adalah antara 3 sampai 5 kali. karena untuk harga lebih dari itu tidaklah menimbulkan perbedaan yang berarti. Dari pengamatan tabel 2 dan 3 atau gambar 4 dan 5, dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Untuk analisa *large deflection*, P- Δ (Wood), memberi harga yang tidak jauh berbeda. Rata-rata pertambahan momen pada kolom untuk gedung berlantai 12 adalah $\pm 6 - 8 \%$ dibanding dengan *small deflection theory*.
2. Harga *large deflection* memberi harga yang paling rendah dibanding dengan metode *second order effect*

lainnya.

3. Pada portal 4x2 bentang, analisa menggunakan *small deflection* memberikan harga *under estimate* dibanding dengan menggunakan *large deflection* atau metode *second order effect* lainnya yang memberikan hasil yang *over Estimate*.

REFERENSI

American Concrete Institute, 2011

Bagio, Tony H., Cheng H.W. "Program Komputer untuk Elastic Plane Frame menggunakan Large Deflection Theory", Universitas Kristen Petra, 1987

Bambang Budiono, et, al, "Contoh Desain Bangunan Tahan Gempa", Penerbit ITB, 2017.

National Building Code of Canada (NBCC), 2005

Przemieniecki, J.S. "Theory of Matrix Structural Analysis", Mc Graw-Hill Company, 1968.

SNI 1726:2019 Tata Cara Perencanaan Ketahanan Gempa untuk Struktur Bangunan Gedung dan Non Gedung, 2019

SNI 2847:2019 Persyaratan Beton Struktural untuk Bangunan Gedung, 2019

SNI 1727:2020 Beban Minimum untuk Perancangan Bangunan Gedung, 2020

Weaver, W., Gere, J.M. "Matrix Analysis of Frame Structures, Second Edition.", D. Van Nostrand Company, 1980

Wood, B.R, Beaulieu, D. and Adams, P.F. "Column Design by P-Delta Method", proceeding, ASCE, Vol, 103 ST 8, August 1977, page 1691

Wood. B.R, Beaulieu, D. and Adams, P.F. "Further Aspects of Design by P-Δ Model", ASCE, Vol, 102, Issue 3, Mar 1976, <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0004292>